

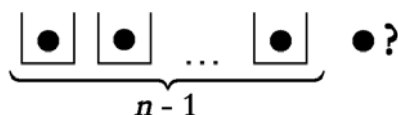


Principiul CUTIEI LUI DIRICHELET

Mihaela Oltean

Chiar dacă principiul cutiei lui Dirichelet se bazează pe una dintre cele mai simple observații matematice, rezolvarea problemelor folosind această metodă nu este o sarcină prea ușoară. În acest articol vom prezenta câteva probleme dificile care pot fi rezolvate folosind principiul cutiei lui Dirichlet.

Principiul cutiei lui Dirichlet se bazează pe una dintre cele mai simple observații matematice: *dacă avem n obiecte dispuse în $n - 1$ cutii, atunci există cel puțin o cutie care conține două obiecte.* Dar, pe cât de simplu este acest principiu, pe atât de complexe sunt implicațiile lui.



Există destule probleme, unele dintre ele propuse spre rezolvare la diferite concursuri de programare naționale sau internaționale, a căror soluție se poate obține mult mai ușor dacă se folosește principiul cutiei lui Dirichelet.

În continuare vom prezenta câteva probleme care se rezolvă folosind această observație matematică.

Problema 1

Se consideră cinci puncte în interiorul unui triunghi echilateral de latură 1 unitate. Se cere să se arate că există două puncte situate la o distanță de cel mult 0.5 unități.

Soluție

La început vom trasa cele trei linii mijlocii ale triunghiului. În acest fel triunghiul dat este împărțit în patru triunghiuri echilaterale identice. Laturile acestor triunghiuri vor avea lungimea 1/2 unități, deci două puncte aflate în același triunghi nu se pot afla la o distanță mai mare de 1/2 unități unul față de celălalt.

Avem, deci, patru triunghiuri și cinci puncte. Conform principiului cutiei lui Dirichelet, două puncte se vor găsi în același triunghi, deci se vor afla la o distanță de cel mult 1/2 unități unul față de celălalt.

O generalizare a acestei probleme este următoarea:

Fie un triunghi echilateral de latură n unități. Să se arate că oricum am alege $n^2 + 1$ puncte în interiorul triunghiului vor exista cel puțin două puncte la o distanță de cel mult o unitate.

Problema 2

Vom considera un pătrat și nouă linii, fiecare dintre ele tăind pătratul dat în două patrulatere de arii proporționale cu 2/3. Să se arate că există trei linii care trec prin același punct.

Soluție

Vom eticheta vârfurile pătratului cu A, B, C, D în sensul acelor de ceasornic.

Observăm, în primul rând, că nici una dintre linii nu poate tăia două laturi adiacente ale pătratului pentru că în felul acesta am obține un triunghi și un pentagon și în nici un caz un patrulater. Să presupunem că una dintre linii intersectează laturile BC și AD în punctele M , respectiv N . Patrulaterele $ABMN$ și $CDNM$ sunt, evident, trapeze având aceeași înălțime. Ariile lor sunt în același raport în care se află și liniile lor mijlocii. Deci, MN împarte linia mijlocie a pătratului în două segmente având raportul 2/3. Acest lucru este adevărat pentru oricare dintre cele nouă linii. Dar există doar patru puncte care împart liniile mijlocii ale pătratului în raportul 2/3. Conform principiului cutiei, cel puțin trei linii trec prin același punct.

Problema 3

Considerăm 25 de puncte în plan cu proprietatea că în orice triplet există o pereche de puncte aflate la o distanță mai mică de o unitate. Să se arate că există un cerc de rază o unitate care conține 13 puncte dintre cele 25.



Soluție

Pentru a rezolva această problemă, vom alege la întâmplare un punct (pe care îl notăm cu A) dintre cele 25 date și vom considera cercul $B(A, 1)$ având centrul în A și raza o unitate.

Dacă toate punctele (sau cel puțin 13) sunt în B , atunci problema este rezolvată.

În caz contrar, considerăm un alt punct D care nu se află în B (distanța între A și D este mai mare de o unitate). Pentru orice alt punct C , fie distanța dintre A și C este mai mică de o unitate, fie distanța dintre D și C este mai mică de o unitate. Cu alte cuvinte, fiecare dintre punctele rămase aparțin fie cercului cu centrul în A și rază o unitate, fie cercului cu centrul în D și rază o unitate. Conform principiului cutiei, în interiorul unuia dintre cercuri se vor afla cel puțin 13 puncte.

Problema 4

Fie cinci puncte în plan, având coordonate întregi. Să se arate că unul dintre mijloacele segmentelor care unesc cele cinci puncte are, de asemenea, coordonatele întregi.

Soluție

Fiecare punct din plan este caracterizat de perechea (x, y) , unde x este coordonata sa pe axa Ox , iar y este coordonata sa pe axa Oy .

Conform principiului cutiei lui Dirichelet, dintre cele cinci coordonate pe axa Ox (ale punctelor date) trei dintre ele au aceeași paritate.

Apoi, dintre cele trei puncte care au coordonatele pe Ox de aceeași paritate, vor exista două (tot conform principiului cutiei) pentru care coordonatele pe axa Oy au aceeași paritate. Mijlocul segmentului care unește aceste două puncte are coordonate numere întregi, deoarece media aritmetică a două numere de aceeași paritate este întotdeauna un număr întreg.

O altă rezolvare pentru această problemă poate fi următoarea: există patru variante pentru alegerea coordonatelor celor cinci puncte deoarece un punct poate să aibă coordonatele *pare* sau *impare*. Deci, conform principiului cutiei, există două puncte care au coordonatele alese în același fel (având aceeași paritate și pentru x și pentru y). În concluzie, mijlocul segmentului care leagă cele două puncte are coordonatele întregi.

Problema 5

Fie $P(x)$ un polinom cu coeficienți întregi. Dacă $P(a) = P(b) = P(c)$ pentru trei valori diferite a, b, c , să se arate că nu există d astfel încât $P(d) = 3$.

Soluție

Considerăm polinomul: $P(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_1 x + c_0$.

Propoziție:

Pentru oricare două numere întregi p și q , $P(p) - P(q)$ este divizibil prin $p - q$: $(p - q) \mid P(p) - P(q)$.

Demonstrație:

Într-adevăr, $P(p) - P(q) = c_n(p^n - q^n) + c_{n-1}(p^{n-1} - q^{n-1}) + \dots + c_1(p - q)$ și deoarece $(p - q) \mid (p^k - q^k)$ pentru orice valoare $k > 0$, propoziția este demonstrată.

Cu această propoziție demonstrată, în continuare presupunem că: $P(a) = P(b) = P(c) = 2$ și $P(d) = 3$, unde a, b, c și d sunt distincte.

Din propoziție avem:

$$\begin{aligned}(d - a) \mid (P(d) - P(a)) &= 3 - 2 = 1, \\(d - b) \mid (P(d) - P(b)) &= 3 - 2 = 1 \text{ și} \\(d - c) \mid (P(d) - P(c)) &= 3 - 2 = 1,\end{aligned}$$

deci $d - a, d - b, d - c$ sunt distincte și divid pe 1. Dar acest lucru nu este posibil (conform principiului cutiei) deoarece 1 are doar doi divizori distincți (pe 1 și pe -1), deci, presupunerea făcută este falsă. Astfel am demonstrat că nu există d astfel încât $P(d) = 3$.

Problema 6

Se consideră două numere naturale n și m . Se cere să se determine dacă există două numere naturale p și q distincte, astfel încât $m^p - m^q$ să fie divizibil cu n .

Soluție

Considerăm numerele $m^0, m^1, m^2, \dots, m^n$. În total sunt $n + 1$ numere. Resturile împărțirii acestor numere la n sunt din mulțimea $\{0, 1, \dots, n - 1\}$. Există în total n valori distincte pentru resturi, care sunt generate de $n + 1$ numere, deci (conform principiului cutiei lui Dirichlet) vor exista două numere distincte m^p și m^q care dau același rest prin împărțire la n , deci $m^p - m^q$ este divizibil cu n .

Algoritmul în pseudocod care rezolvă această problemă este:

Algoritm resturi

citește n, m

{ vom folosi un tablou care are dimensiunea n , în care vom reține resturile și care conține resturile împărțirii valorilor m^i , $i = 0, 1, \dots, n$, la n }

resturi₀ ← 1; // rest [m^0/n] = 0

pentru $i=1, n$ **execută**:

{ $m^{i-1} = n \cdot c_{i-1} + \text{resturi}_{i-1}$
 $m^i = m \cdot (n \cdot c_{i-1} + \text{resturi}_{i-1}) = n \cdot c_i + \text{resturi}_i$
 $\Rightarrow \text{resturi}_i = \text{rest}[(m \cdot \text{resturi}_{i-1})/n]$
 $\text{resturi}_i \leftarrow \text{rest}[(m \cdot \text{resturi}_{i-1})/n]$ }

sfârșit pentru

// căutăm două resturi egale

pentru $p=0, n-1$ **execută**:

pentru $q=1, n$ **execută**:

dacă resturi_p = resturi_q **atunci**

scrie "Numerele căutate sunt ", p, " și ", q
*ieșire

sfârșit dacă

sfârșit pentru

sfârșit pentru

sfârșit algoritm



Problema 7

Se consideră un număr natural p care nu este divizibil cu 10. Să se determine dacă există o putere a lui p care se termină cu $0\dots 01$ (k valori egale cu zero).

Soluție

Fie p^m și p^n ($m < n$) două puteri ale lui p care dau același rest prin împărțire la 10^{k+1} (vezi problema 6). Atunci $p^n - p^m$ este divizibil cu 10^{k+1} .

Știm că $p^n - p^m = p^m(p^{n-m} - 1)$ divizibil cu 10^{k+1} .

Dar p^m nu se divide cu 10. Înseamnă că $p^{n-m} - 1$ se divide cu 10^{k+1} . Deci $p^{n-m} - 1$ se termină cu $k + 1$ cifre de zero, iar p^{n-m} se termină cu k cifre egale cu 0 și un 1.

Problema 8

Se consideră un cerc cu raza de o unitate și șase puncte în interiorul său. Să se arate că există două puncte la o distanță de cel mult o unitate.

Soluție

Împărțim cercul în șase sectoare egale astfel încât unul dintre punctele date (să-l notăm pe acesta cu A) să se afle pe una dintre cele șase raze care unesc centrul cu circumferința sa.

Distanța între oricare două puncte din același sector este cel mult o unitate. Dacă într-unul dintre cele două sectoare în care este inclus punctul A se mai află încă un punct, atunci problema este rezolvată. În caz contrar, mai rămân patru sectoare în care sunt dispuse cinci puncte și, conform principiului cutiei, va exista sigur un sector în care vom avea două puncte.

Cele două puncte din același sector se află la o distanță mai mică sau egală cu o unitate unul față de celălalt.

Problema 9

Se consideră un număr $n > 3$. Fie m cel mai mare număr întreg mai mic decât $(n + 2) / 2$. Să se arate că, alegând la întâmplare cel puțin m numere întregi din intervalul $[1, n]$, există trei numere (dintre cele alese) cu proprietatea că unul este egal cu suma celorlalte două.

Soluție

Vom considera că x este cel mai mic număr ales. Calculăm toate diferențele dintre x și celelalte numere alese. Vom avea m diferențe. În continuare vom arăta că una dintre aceste diferențe este egală cu unul din numerele selectate.

Evident, nu există două diferențe egale, deoarece în acest caz numerele selectate nu mai sunt distincte. Numerele neselectate sunt în număr de $n - m$. Avem, deci, m diferențe și $n - m$ valori pe care le-ar putea avea aceste diferențe. Dar $m > n - m$, deoarece $2 \cdot m > n$.

Problema 10

Considerăm un număr natural n . Să se arate că dacă se aleg mai mult de jumătate din întregii din intervalul $[1, 2 \cdot n]$, atunci vor exista doi întregi care se divid unul pe celălalt.

Soluție

Construim mulțimile $A_i = \{2^p \cdot (2 \cdot i - 1) \mid p = 0, 1, \dots\}$, care conțin numerele impare împreună cu multiplii lor mai mici sau egali cu $2 \cdot n$. Mulțimea A_i conține al i -lea număr impar din intervalul $[1, 2 \cdot n]$. În intervalul $[1, 2 \cdot n]$ există n întregi impari, deci vom avea n mulțimi. Reuniunea acestor mulțimi este mulțimea $\{1, 2, \dots, 2 \cdot n\}$.

Alegând $n + 1$ întregi, doi vor aparține aceleiași mulțimi. În aceste mulțimi există cel puțin două numere: un număr impar și dublul său care satisfac cerința din enunț.

Problema 11

Să se arate că dacă se aleg 55 de numere întregi distincte din intervalul $[1, 100]$, există o pereche de numere a căror diferență este 10, o altă pereche a cărei diferență este 12, dar nu există nici o pereche a cărei diferență să fie 11.

Soluție

Împărțim numerele între 1 și 20 în zece mulțimi: $\{1, 11\}, \{2, 12\}, \dots, \{10, 20\}$. Continuăm împărțirea cu numerele din intervalele $[21, 40], [41, 60], [61, 80], [81, 100]$. Avem în total 50 de mulțimi. Deci, dacă alegem 55 de numere, vor exista două din aceeași mulțime (care au diferența 10).

Pentru diferența 12 vom construi mulțimile: $\{1, 13\}, \{2, 14\}, \dots, \{12, 24\}$. Vom face la fel și pentru celelalte numere. La sfârșit mai rămân mulțimile $\{97\}, \{98\}, \{99\}, \{100\}$. În final vom avea 52 de mulțimi. Dacă alegem 55 de numere, vor exista două din aceeași mulțime, adică vor avea diferența 12.

Dacă se încearcă dispunerea numerelor în mulțimi cu diferența 11, se va observa că se vor construi 55 de mulțimi, deci se vor putea alege 55 de numere a căror diferență să nu fie 11.

Problema 12

Demonstrați că printre oricare n numere întregi din intervalul $[1, 2 \cdot n - 2]$ există doi întregi care au suma impară.

Soluție

Construim mulțimile: $\{1, 2\}, \{3, 4\}, \dots, \{2 \cdot n - 1, 2 \cdot n - 2\}$. Vom avea în total $n - 1$ mulțimi. Alegând n numere, vor exista două care aparțin aceleiași mulțimi. Suma acestor două numere este impară.

Problema 13

Se consideră 1000 de numere întregi distincte. Să se determine dacă există doi dintre ei care au diferența sau suma egală cu un multiplu de 1997.

Soluție

Construim mulțimile de resturi modulo 1997: $\{0\}, \{i, 1997 - i\}, 1 \leq i \leq 998$. Toate numerele dau, prin împărțirea la 1997, un rest aflat în una din cele 999 de clase. Dacă două din 1000 de numere, prin împărțirea la 1997, vor da același rest, atunci ele vor diferi unul de celălalt printr-un multiplu de 1997. În caz contrar vor exista două numere care au

suma resturilor împărțirii la 1997 în aceeași mulțime, deci suma resturilor lor este 1997.

Problema 14

Într-o cameră se află n persoane. Fiecare dintre acestea cunoaște un număr de alte persoane din cameră. Se știe că relația de cunoștință este reciprocă (dacă A cunoaște pe B , atunci și B cunoaște pe A). Să se determine dacă există două persoane care cunosc același număr de persoane din cameră.

Soluție

Fiecare persoană din cameră cunoaște cel puțin 0 persoane și cel mult $n - 1$ persoane.

Dacă există o persoană care le cunoaște pe toate celelalte $n - 1$ persoane, atunci nu va exista o persoană care să nu cunoască nici o altă persoană din cameră.

Dacă există o persoană care nu cunoaște pe nimeni din cameră, atunci nu va exista o persoană care să cunoască pe toate celelalte $n - 1$ persoane din cameră.

Dacă vom construi mulțimea numerelor corespunzătoare numărului de persoane cunoscut de fiecare din cameră, atunci aceasta va conține cel mult $n - 1$ valori distincte (dacă îl conține pe 0, atunci nu îl conține pe $n - 1$, iar dacă îl conține pe $n - 1$ nu îl conține pe 0). Deoarece în cameră se află n persoane, înseamnă că cel puțin două dintre ele cunosc un același număr de persoane din cameră.

O altă variantă de enunț pentru această problemă ar fi următoarea: *Să se arate că într-un graf neorientat există două vârfuri care au același grad.*

Problema 15

La un campionat de fotbal participă n echipe care joacă între ele, astfel încât oricare două joacă o singură dată. Să se arate că în orice moment există două echipe care au jucat același număr de jocuri.

Soluție

La un moment dat fiecare echipă a jucat cel puțin 0 jocuri, dar nu mai mult de $n - 1$.

Dacă există o echipă care a jucat $n - 1$ jocuri, înseamnă că nu există o echipă care să nu fi jucat nici un joc. Dacă există o echipă care nu a jucat nici un joc, înseamnă că nici o echipă nu a jucat toate cele $n - 1$ jocurile. Dacă formăm mulțimea numerelor care constituie numărul de partide jucate de fiecare echipă, atunci aceasta va conține cel mult $n - 1$ numere (dacă îl conține pe 0, atunci nu îl conține pe $n - 1$, iar dacă îl conține pe $n - 1$ nu îl conține pe 0). Fiind n echipe, înseamnă că cel puțin două dintre ele au jucat același număr de jocuri.

Problema 16

Se consideră o mulțime de cifre C care conține și cifra 0. Să se determine un multiplu al lui n care este format din toate cifrele din C .

Soluție

Fie $C = \{c_1, c_2, \dots, c_k\}$ mulțimea cifrelor date. Evident $2 \leq k \leq 10$. Presupunem, în continuare că, $c_k = 0$.

Construim numărul $A = c_1c_2\dots c_k$. Apoi construim șirul de numere:

$$\begin{aligned}x_1 &= A, \\x_2 &= AA, \\x_3 &= AAA, \\&\dots \\x_n &= A\dots A \text{ (} A \text{ de } n \text{ ori)}.\end{aligned}$$

Calculăm resturile r_i ale împărțirii lui x_i la n . Aceste resturi sunt numere întregi din mulțimea $\{0, 1, \dots, n - 1\}$. Dacă unul dintre resturi este 0, atunci numărul corespunzător este soluția problemei. În caz contrar vom avea $n - 1$ tipuri de resturi generate de n numere, deci, conform *principiului lui Dirichlet*, două resturi (r_i și r_j , $i < j$) sunt egale. Dacă scădem numerele corespunzătoare $x_j - x_i$, vom obține un număr, care prin împărțire la n , dă restul 0 și care reprezintă totodată și soluția problemei.

Problema 17

Fie A o mulțime cu n elemente. Să se arate că, dacă alegem mai mult decât jumătate dintre submulțimile mulțimii A , atunci două dintre acestea au proprietatea că una este inclusă în cealaltă.

Soluție

Se știe că o mulțime cu n elemente are 2^n submulțimi. Fie x un element din A și $B = A \setminus \{x\}$.

Pentru fiecare submulțime S a lui B vom forma perechea $\{S, S \cup \{x\}\}$. Aceste perechi formează o partiție a mulțimii A .

Dacă alegem mai mult de jumătate dintre submulțimile lui A , conform principiului cutiei, vor exista două care se află în aceeași pereche.

Două mulțimi din aceeași pereche au proprietatea că una este inclusă în cealaltă.

Bibliografie

1. **Adrian Ghioca, Nicolae Teodorescu**, *Culegere de probleme*, Editura SSMR, București, 1987.
2. **Horia Georgescu**, *Principiul cutiei lui Dirichlet*, *Gazeta de Informatică nr. 9, 10*, Editura Computer Press Agora, Cluj-Napoca, 1994
3. **Nicolae Teodorescu**, *Probleme din Gazeta de Matematică*, Editura Tehnică, București, 1984.
4. *******, *Colecția Gazeta Matematică*, Editura SSMR.
5. *******, *Colecția GInfo*, Editura Computer Libris Agora.
6. *******, *Probleme de matematică traduse din revista sovietică Kvant*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1983.

Mihaela Oltean este cadru didactic la Colegiul "David Prodan" din Cugir. Poate fi contactată la adresa de e-mail olteanmihaelaelena@yahoo.com.

